



TITLE:

Geometric 4 manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4 manifolds(Geometry of Moduli Spaces and 4 Dimensional Manifold II)

AUTHOR(S):

上, 正明

CITATION:

上, 正明. Geometric 4 manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4 manifolds(Geometry of Moduli Spaces and 4 Dimensional Manifold II). 数理解析研究所講究録 1988, 662: 85-104

ISSUE DATE:

1988-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100618>

RIGHT:

Geometric 4-manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4-manifolds

東大理 上 正明 (Masaaki Ue)

Thurston の意味の幾何学的構造 (geometric structure) と持つ多様体 (geometric manifold) は、3次元では Thurston の一連の結果や予想が示すように3次元トポロジーの中核に位置しているが、4次元では特殊な同様の位置しか占めていないと思われる。実際に幾何学的構造をもたない例が多数存在する (おそらく大多数はそうである)。しかし幾何学的構造をもつ4次元多様体はある特別な興味あるクラスを形成しているのは事実であり、4次元多様体全体 (この全体像に関して3次元における Thurston のそれのような指導原理は今のところない) の中でそれらの占める位置、そのトポロジーを明らかにすることは一定の意義をもつであろう。ここではある種のタリアの geometric 4-manifold を Seifert 4-manifold の言葉によって位相的に特徴づける。これは

初等的であるが、必須の第一段階であって 3次元多様体における対応する結果のアナロジーである。

§1 4次元の geometry

Thurston の意味の geometry (X, G) とは次の性質をみたすものである。

- (1) X は 1-connected Riemannian manifold
- (2) G は X の isometry の群
- (3) G は X 上 transitive に作用 (便宜上左から作用するとする)
- (4) G の離散部分群 Γ で $\Gamma \backslash X$ が有限体積となるものがある。

geometric manifold of type (X, G) とは局所座標近傍が X の open set で座標変換が G の元となるようにとれる多様体であり、complete ならば $\Gamma \backslash X$ ($\Gamma \in G$ discrete, X 上 free に作用) と書ける。以下対象とする geometric manifold はすべて closed orientable とする。したがって特に上記のように表わされ、 Γ は orientation preserving, $\Gamma \backslash X$ compact となる。そこで G としては $\text{Isom}^+ X = \{ \text{orientation-preserving } X \text{ の isometry の全体} \}$ を考えれば十分である。(以下 G は省略)。また 2つの geometry (X, G) と (X', G') は次の条件を

また φ と ψ は同値とみなす。

$$\exists \varphi: X \cong X' \text{ diffeo} \quad \psi: G \cong G' \text{ isomorphism}$$

such that $\varphi(gx) = \psi(g)\varphi(x)$, $x \in X$, $g \in G$.

以下同値類を考え、特定の計量の入れ方は問題としない。

3次元の geometry は次の 8 種

$$H^3, S^3, E^3, S^2 \times E, H^2 \times E, Nil^3, \widetilde{SL}_2, Sol^3$$

であり両端を除く 6 種は 3次元の Riemannian manifold に対応することが知られている。一方 4次元の geometry は Filipkiewicz [F] により分類された。以下の記号は Wall [W1, 2] による。

$$\text{Compact: } P^3(\mathbb{C}), S^4, S^2 \times S^2$$

$$\text{Compact factor: } S^2 \times E^2, S^3 \times E^1, S^2 \times H^2$$

$$\text{Euclidean: } E^4$$

$$\text{Nilpotent: } Nil^3 \times E^1, Nil^4$$

$$\text{Solvable: } Sol^4, Sol_1^4, Sol_{m,n}^4$$

$$\text{Mixed: } H^2 \times E^2, \widetilde{SL}_2 \times E^1, H^3 \times E^1, \mathbb{F}^4$$

$$\text{Semisimple: } H^4(\mathbb{C}), H^4, H^2 \times H^2$$

($Sol_{m,n}^4$ $m, n \in \mathbb{Z}$ は同値でないものが無限にある)

ここでは特別にここで取り扱う 4 種のみ説明する。

(1) E^4 ... euclidean, $Isom^+ E^4 = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(4)$

(2) $Nil^3 \times E^1$, Nil^3 is Heisenberg group

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ this bundle structure is}$$

$$1 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow Nil^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow 1 \quad (\text{split?})$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y)$$

$$Isom^0 Nil^3 \text{ (identity component)} = Nil^3 \rtimes PO(2) \text{ this}$$

$Isom Nil^3$ has 2 components (it is base, fiber two of the same structure) is. $Isom(Nil^3 \times E^1) = Isom Nil^3 \times Isom E^1$

(3) $Nil^4 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \ni t$ is \mathbb{R}^3 on

$$\exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ this is } \mathbb{R}^3. \quad Isom^0 Nil^4 = Nil^4 \text{ this}$$

$Isom^+ Nil^4 / Isom^0 Nil^4$ is the $Aut Nil^4$ of the element.

$$(x, y, z, t) \rightarrow (\varepsilon x, \varepsilon \eta y, \varepsilon z, \eta t) \quad \varepsilon, \eta = \pm 1$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}$$

(4) $Sol^3 \times E^1$, Sol^3 is 3 elements of solvable Lie group

$$\cong \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ is } \mathbb{R}^2 \text{ on } \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \text{ this is } \mathbb{R}.$$

$$Isom^0 Sol^3 \cong Sol^3, \quad Isom Sol^3 / Isom^0 Sol^3 \cong D_8 \text{ (dihedral)}$$

$$Isom(Sol^3 \times E^1) = Isom Sol^3 \times Isom E^1 \text{ this is.}$$

then $Sol^3 \times E^1$ is $Sol_{m,n}^4$ of the special case ($m=n$ case) is.

§2 Seifert 4-manifolds

fiber 構造をもつ 4次元多様体として fiber の次元が 1, 2, 3 次元のものと考えられるが、ここでは fiber base とも 2次元で、特に fiber が T^2 (2次元トーラス) となるものを考える。この場合は多重ファイバーを持つことで豊富な対象となる。(以下 closed orientable なもののみ考える)。

定義 N が Seifert 4-manifold であるとは

- (1) N は ある 2-orbifold B 上の (Thurston の意味での) fibered orbifold $\pi: N \rightarrow B$ の構造をもち、(general fiber T^2)
- (2) N は orbifold として non-singular (すなわち本当の多様体) なるものとする。上記の π は局所的に次のように書ける。任意の B 上の点 x は次の形の近傍 U をもつ。

$U \cong B^2/G$ ($G \subset O(2)$ 有限群): $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ への時次の可換図式がなりたつ (x は原点に対応する)

$$\begin{array}{ccc}
 \pi: \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \\
 \parallel & & \parallel \\
 T^2 \times D^2/G & \longrightarrow & D^2/G \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 p: T^2 \times D^2 & \longrightarrow & D^2 \text{ (natural projection)}
 \end{array}$$

ただし G は $T^2 \times D^2$ 上 linear に diagonal に作用する。

条件(2)より G の $T^2 \times D^2$ 上の作用は free "orientation preserving" な "rotation" の Type は必然的に決まるといえる。

case 1 $G = 1$ のとき x は non-singular point
この時は π は T^2 -bundle の構造をもつ。 $\pi^{-1}(x) \cong T^2$ は general fiber

case 2 $G = \mathbb{Z}_m = \{ \rho = \exp \frac{2\pi i}{m}, \tau \text{ 生成元} \}$ のとき x は cone point of angle $2\pi/m$. この時 T^2 の適当な framing $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に對して ρ の作用は $T^2 \times D^2$ 上

$$\rho(x, y, z) = (x - \frac{a}{m}, y - \frac{b}{m}, \rho z) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \bmod \mathbb{Z}^2$$

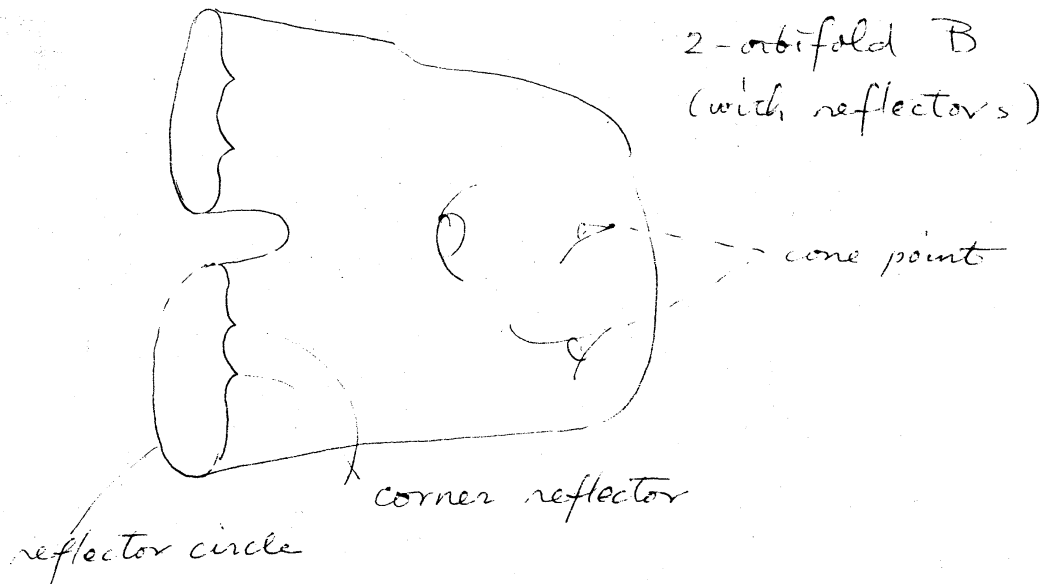
$$z \in \mathbb{D}, |z| \leq 1 \text{ とおける。ただし } a, b \in \mathbb{Z}, \gcd(m, a, b) = 1.$$
このとき $\pi^{-1}(x)$ は multiple torus of multiplicity m である。その type を (m, a, b) と表わすことにする。

case 3 $G = \mathbb{Z}_2 = \langle \tau; \tau \rightarrow \bar{\tau} \rangle$ reflection のとき x は reflection point. τ の $T^2 \times D^2$ 上の action は

$$\tau(x, y, z) = (x + \frac{1}{2}, -y, \bar{z}) \text{ とおける。 } \pi^{-1}(x) \text{ は Klein bottle}$$

case 4 $G = D_m = \langle \rho, \tau, \rho^m = \tau^2 = 1, \tau \rho \tau^{-1} = \rho^{-1} \rangle$ のとき x は corner reflector of angle π/m . このとき ρ, τ の $T^2 \times D^2$ 上の作用は case 2, 3 と同様。ただし $a = 0$ とおける。このとき $\pi^{-1}(x)$ は multiple Klein bottle. その type を $(m, 0, b)$

と表わすことにする。



base に reflector をもつものを考えることは後述の定理によって是不可欠である。これは 3次元の Seifert orbifold (with general fiber S^1) の自然な analogy である。3次元の場合 reflector 上の fiber は $S^1/\text{reflection} \cong I$ であり必然的に total space は singularity をもつ (I の両端) が 4次元の場合は多様体になるものがあり、この場合は fiber は必然的に Klein bottle となる。この Seifert 4-manifold は Seifert 3 orbifold ($[D]$) におけるのと同様な不変量 (Seifert invariant) によって完全にその構成を記述することができる。即ち次の情報によって表わされる。

Base に reflector が"ない"場合

(1) B 上の essential curve にそう monodromy.

up to isotopy で考えればよいので"行列" $\in GL(2, \mathbb{Z})$ で表わされる。

(2) multiple torus の type. cone point の近傍 B_i に対

し type を表示する時自然に ∂B_i の cross section (lift) \tilde{g}_i が一つ定まる。

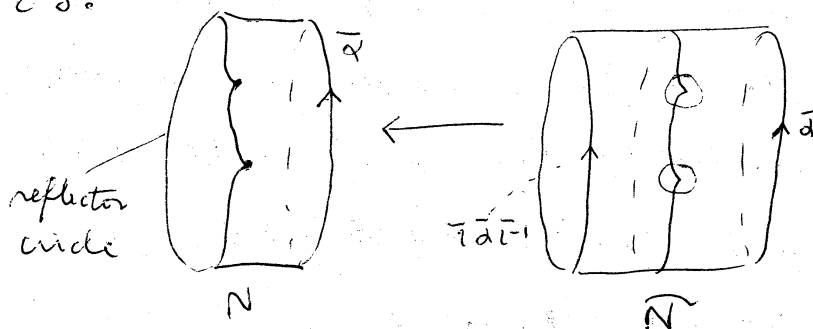
(3) euler class. $\cup g_i$ を $B \cup B_i$ 上の cross section に引き上げるための obstruction $\in \mathbb{Z}^2$.

Base に reflector が"ある"場合

(1)' (1) と同じ

(2)' : multiple torus, multiple Klein bottle の type.

各 reflector circle の近傍 N とその自然な double cover \tilde{N} (reflector circle にあって 2 つの copy を作る) を図のようにとる。



するとこれによって引き起こされる S/N の unbranched

double cover \tilde{S}/\tilde{N} 上 cone point 上の fiber は multiple torus.

その type を定めるとき各 cone point の meridian の lift f_i' が前と同様一つ定まる。さらに N のもう一方の boundary $\bar{\alpha}$ の lift $\bar{\alpha}$ を適当に定めるがらば

(3') reflector circle の euler class. Double cover $\tilde{S}/\tilde{N} \rightarrow S/N$ の covering translation を τ とする。 τ を cover する base の covering translation を $\bar{\tau}$ とおく。

τ と τ^{-1} の $\alpha \cup \cup f_i'$ を $\tilde{N} - \cup$ meridian disks of the cone point 上に拡張するための obstruction $\in \pi^2$, ($\bar{\alpha}$ の lift を適当に定めて各 reflector circle の近傍の外側で (3) に相当する obstruction = 0 とする)。

(4') reflector circle の monodromy. E または $-E$ である。

(上記の N 上の fibration S/N において fiber の framing (l, h) を π_1 -level で $\tau(l, h)\tau^{-1} = (l, h^{-1})$, $\tau^2 = l$ とおけるようにしておく。)

(5') S/N を $S/(B - \cup \text{nd of the reflector circles})$ とはり合わせるときの fiber の framing の座標変換 (一種の monodromy)。

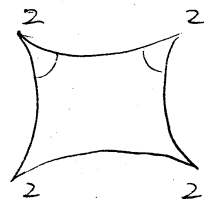
fiber のはり合わせを決めるための monodromy の情報を除

＜残りの invariant は Seifert 3-orbifold 上の invariant に対応しているものである。これは fiber の座標のとりかた、cross section のとりかたなどによって互いに連動して表示が変わりうるが、(normalize していない) 少なくとも 1 組の invariant と組み合わせが多様体が定まる。以下特に base が euclidean 2-orbifold ($B = E^2/G$) とするものに対象を限定すると base の type によって表示すべき invariant の組は次の様になる。

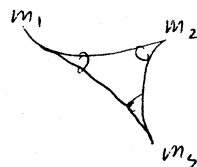
Reflector のない場合

$B = T^2$, K ... monodromy と euler class (1) と (3)
(Klein bottle)

$B = S^2(2, 2, 2, 2)$, $S^2(2, 3, 6)$, $S^2(3, 3, 3)$, $S^2(2, 4, 4)$



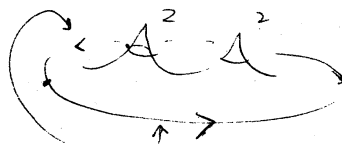
$S^2(2, 2, 2, 2)$



$S^2(m_1, m_2, m_3)$

... multiple torus の type と euler class (2) と (3)

$B = P^2(2, 2)$

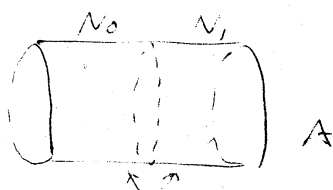


... essential curve の monodromy (order 2).

2 の multiple torus の type と euler class

Reflector のある場合

$$\underline{B = A \text{ (annulus)}}$$



... reflector circle の monodromy

$$A = N_0 \sim N_1$$

($= \pm E$), 各 reflector circle の euler class, N_0 上と N_1 上の fiber の座標変換 ... (3), (4) (5)

$$\underline{B = M \text{ (Möbius Band)}}$$



essential curve 上の monodromy

(order 2), と reflector circle の euler class (reflector circle の monodromy は必然的に E).

B の underlying space が 2次元 disk の場合

(8種類ある) ... multiple torus, Klein bottle の type と reflector circle 上の euler class.

§3 定理.

以上の準備のもと 定理を次の仮定に言明しよう. (1) 対象はすべて closed orientable.

Th. A. n 次元の Seifert 4-manifold M base が euclidean 2-orbifold ならば次の 11 群の 4次元の geometric structure を持つ. $E^4, N, \mathbb{R}^3 \times E^1, N, \mathbb{R}^4, \text{sol}^3 \times E^1$

Th. B. 逆にこれらの type の geometric 4 manifold は Seifert 4-manifold で base が euclidean 2-orbifold となる。(ただし E^4 case に唯一例外がある。)

Th. C 2つの Seifert 4-manifold over euclidean base orbifold は基本群のみで diffeotype が決まる。特に type が Nil^4 , $Sol \times E^1$ ならば fiber 構造も一意である。

Remark. 1, Wall [W1] により次のことが知られている。

★ type の異なる closed geometric 4 manifold はホモトピー同値でない。

上記の Seifert 4-manifold は ^{base} type が euclidean なので $K(\pi, 1)$ である。よって type が異なれば基本群は異なる。

Remark 2 type が E^4 , $Nil^3 \times E^1$ の場合 fiber 構造は一意には程遠い。たとえば monodromy が non-periodic で $Nil^3 \times E^1$ 構造をもつ Seifert 4-manifold が多数存在するが、Th. B の証明(後述)で保障される Seifert 4-manifold の構造はもとの fibering とは一致しない。

い。その場合もその base に reflector がなくても (たとえば T^2 上の T^2 bundle), 新しい fibering に關しては base が Annulus や Möbius band になることがある。

Remark 3. type E^4 , $Nil^3 \times E^1$, Nil^4 なる geometric 4-manifolds は Filipkiewicz の分類によると $1/\pi^2$ の closed orientable infammanifold in dimension 4 を尽くしている。したがって、 π はこれらの共通の topological な性質を持つことは当然だが、 π は A は一つだけ異質な $Sol^3 \times E^1$ -model をもつ多様体も加えてはじめて topological に一つのまとめた class となることを主張するものである。

Remark 4. オ4番目の type に属する Seifert 4-manifold は、monodromy が Anosov type (1 or 2 or 3) かの様なもので cover される仕方に限る。最も易しい例は、monodromy が Anosov type の S^1 上の T^2 -bundle N と S^1 の直積。あるいは2つの Klein bottle 上の Twisted I -bundle をはりあわせてとられる Sol^3 -type の 3-manifold N' と S^1 の直積。これは自然に Annulus 上の Seifert 4-manifold と見做せる。ThC の主張と相対して、これは reflector をもつ base 上の fibering を対象とすることが不可避であることを示している。

Th A の証明は euclidean 2-orbifold の type に依って (全部で 17 個ある) 逐一実行するよりない。基本的には base の euclidean orbifold の構造と fiber の lattice を parameter 付まで与えておき、これらを調整して、全体の基本群がある type X の isometry の群 $\text{Isom}^+ X$ に properly discontinuous or free に作用するようにすればよい。Seifert 4-manifold $\pi: S \rightarrow B$ の基本群は、

$1 \rightarrow \pi^2 \rightarrow \pi_1 S \rightarrow \pi_1^{orb} B \rightarrow 1$ なる完全系列をもつ。 $\pi_1 S$ の表示は (3次元と同様) 標準的にとることからできる。

(Seifert invariant を使って)。従って上記のような表現

$\pi_1 S \hookrightarrow \text{Isom}^+ X$ をとった時に $\pi_1 S \backslash X$ がもとの S に一致することを見るのはたやすい。(ただし適当な fiber-preserving diffeo を経由して monodromy 表現をよいなものにしておく必要がある)。詳細な対応表を作ることは可能だがここでは省略する。

Th B の前半. 3つの type $\text{Nil}^3 \times E^1$, Nil^4 , $\text{Sol}^3 \times E^1$ については それぞれ次のような完全系列がある。

$$1 \rightarrow \mathbb{R} \times E^1 \rightarrow \text{Nil}^3 \times E^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow (\text{Nil}^4)' \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Nil}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{Sol}^3 \times E^1 \longrightarrow \mathbb{R} \times E^1 \longrightarrow 1$$

ここで $(\text{Nil}^4)'$ は Nil^4 の commutator subgroup.

いづれの場合も geometric 4-manifold $T \backslash X$

($\Gamma \subset \text{Isom}^+ X$) を与える T は Γ の作用 (の作用) fiber $\cong \mathbb{R}^2$ に制限すると lattice となり. また quotient $\cong \mathbb{R}^2$ 上も discrete で

cocompact な作用をひき起こすことばかりである。(Malcev や

Mostow の Lie 群の lattice に関する定理と若干の geometrical な議論) たとえば $\Gamma_0 = \Gamma \cap \text{Isom}^0 X$ とおくと. 最初の例で

は $\Gamma_0 \backslash \text{Nil}^3 \times E^1$ は自然に 3 次元曲面の構造をとりかへる (

Wall). Γ/Γ_0 は有限群であり fiber-preserving に作用する.

そこで Γ が X 上 free に orientation preserving に作用していることも考慮すれば. この induced fibration は必然的に §2 で述べた Seifert 4-manifold の構造を持っていることばかりである.

§4 の場合は古典的な E. Calabi の結果がある. この結果は first betti number $b_1 \geq 1$ なる closed euclidean manifold をより次元の低い euclidean manifold に引き下ろす (Calabi's construction) もので closed orientable

euclidean 4-manifold M に限って述べる (この場合は常に $b_1 \geq 1$) のようになる。 M は次の情報によって表わされる

- closed orientable euclidean 4-g manifold N ($g \geq 1$)
 - 有限 π -群 $\Delta = \mathbb{Z}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{r_g}$ ($r_i = 1$ でもいい)
 - N 上の Δ 作用 (orientation-preserving affine transformation) で次の性質をもつもの
- ★ N 上 Δ -invariant nontrivial parallel vector field がない。

このとき $b_1(M) = g$ となる。上記の情報が与えられて

$M = (N \times T^g) / \Delta$ と記述される。ただし Δ の T^g -factor への作用は $T^g = S^1 \times \cdots \times S^1$ の各 factor についての自然な回転。

逆にこのような表示をもつ多様体は $b_1 = g$ の closed orientable euclidean 4-manifold となる。

これを Seifert 4-manifold の観点からみれば、1つの例外を除いて T^2 を fiber とする fibration と思えることが出来る。1つの例外は次の通り。

$(N \times S^1) / \mathbb{Z}_3$ ただし N は $P^2(2, 2)$ 上の euclidean Seifert 3-manifold での holonomy $\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 。
 \mathbb{Z}_3 は N の 3つの nontrivial holonomy の回転軸 (互いに直交している) の間を $\frac{1}{3}$ 回転するように作用する。Th A により E^4 -構造をもつこととわかる Seifert 4-manifold を up to diffeo

で分類すると (Bieberbach の定理により基本群の同型分類と
 可なりよい。 fiber 構造は一意的でないので fiber の基本群と
 可なりうる π^2 subgroup の入り方について combinatorial に議論
 する), 丁度 26 個あり, 例外と合わせて 27 個であることがわか
 る。これは古典的な分類に当然一致する。(Calabi の最初の
 announce では教えずにわかっていて。 Chaudry - Sah 等の別の
 方法で 27 個であることが後にわかった。いづれにせよ分類の詳
 細なリストは印刷された論文の形ではあるではない)。 E^4 -case
 の古典的結果を Seifert 4-manifold の言葉で書き直すのによ
 りこれによって他の geometry との相関がより明瞭になるため
 である。(特別の monodromy, euler class をもつときのみ E^4 -flat
 になりそうでない時は他の geometry が入る。 E^4 case は有限個
 だが他は当然無限に存在する)。 なお Seifert 4-manifold
 (fiber T^2) になる例と 1 つの例外とある 3 の holonomy 群によって
 区別される。前者は cyclic or dihedral, 後者は tetrahedral.

7/17 の後半 (Nil^4 , $Sol^3 \times E^1$ case の fiber 構造が一意
 であること) は基本的には適当な finite cover をとって T^2
 T^2 上の T^2 -bundle の level の話に帰着させることによりできる。
 T^2 上の T^2 -bundle は既に分類されている (Sakamoto -

Fukuhara) ので。その分類に従い、かつ Th A の結果とを
 と合わせると topological な議論で結論に至る。また
 E^4 , $Nil^3 \times E^1$, Nil^4 case については rigidity theorem
 があり、(E^4 は Bieberbach, 他は Lee-Raymond) 基本群が
 同型ならばある affine transformation で互いに移り合うことが
 知られている。

Remark. Th A の主張は“ h は monodromy で fiber を 1 回
 回させてもなお (base が euclidean ならば) 全体が geometric
 である”という点が本質的である。同じ主張は base が hyperbolic
 2-orbifold である Seifert 4-manifold については成立
 しない。実際に $H^2 \times E^2$, $SL_2 \times E^1$ を model とする geometric
 4-manifold は base が hyperbolic であるような Seifert 4-
 manifold になるがたとえ monodromy が (up to isotopy で)
 periodic でなければ ^(hyperbolic base の case) ない。この場合は fiber 構造は $\frac{1}{n}$ に
 一致であり、また他の type の geometry は許さないことがわかる。
 つまり flat structure をもつ fiber T^2 と異なる base をもと
 とすは必ずしも等質的ではない。(3次元 Seifert fibered space
 のときは monodromy がないので“このような事態は起こらない”)

Remark Wall [w.12] は 4次元の geometry (X, G) で compatible complex structure を持つ (即ち, X に complex structure が入り, それを用いて G の元が holomorphic auto. として働く) 場合を完全に決定した。この場合は $\Gamma \subset G$ が $\Gamma \backslash X$ は複素曲面となる。一般に 4次元多様体 M 上の複素曲面に同相かという問題が考えられる (一般には難しい) が, 特別ならす。今扱った Seifert 4-manifold over euclidean base orbifolds のクラスの中では完全にわかる。

E^4 -case は 27個中 8個, $T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ と T^2 の hyperelliptic surface. 後者は1を相対的には T^2 上の T^2 -bundle で "periodic monodromy" をもち $b_1 = 2$ とおけるものと1で特徴づけられる。これは genus 0 の base orbifold 上の Seifert fibration で $b_1 = 2$ とおけるものの全体と一致する。

$Nil^3 \times E^1$ case. 中. Kodaira 曲面 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{primary} & b_1 = 3 \\ \text{secondary} & b_1 = 1 \end{array} \right.$

前者は $b_1 = 3$ の T^2 上の T^2 -bundle, 後者は genus 0 の base orbifold 上の Seifert 4-manifold で $b_1 = 1$ とおけるもの (上記の hyperelliptic surface 以外) と1を相対的に特徴づけられる。後の2つ, Nil^4 , $Sol \times E^1$ の γ_1 は存在しない。
証明は分類結果から比較的容易である。

References

- [C] Calabi Closed, locally euclidean 4 dimensional manifolds. Bull. Amer. Math. Soc 63. 135 (1957)
- [D] Dumber Fibered orbifolds and crystallographic groups. Thesis, Princeton Univ. 1981.
- [F] Filipkiewicz. Four dimensional geometries, Ph.D Thesis Univ of Warwick 1984
- [SF] Sakamoto - Fukuhara Classification of T^2 -bundles over T^2 Tokyo J Math 6 311 ~ 327 (1983)
- [U] Ue. Geometric 4-manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4-manifolds, preprint 1987
- [W1] Wall. Geometric structures on compact complex analytic surfaces. Topology 25, 119-133 (1986)
- [W2] —, Geometries and geometric structures in real dimension 4 and complex dimension 2. Proc. Univ. Maryland, Geometry and Topology Springer Lect. Note vol 1167 1985
- [Wol] Wolf. Spaces of Constant Curvature. Publish or Perish (5-th edition) 1983